
Глава 7

Перенос-диффузия вихря

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в двумерном случае, записанные в так называемых переменных вихрь-функция тока, формально совпадают с уравнениями переноса примеси при наличии диффузии. Это, в частности, позволяет использовать результаты гл. 5 для конструирования на языке FreeFem++ достаточно простого алгоритма решения задачи о движении жидкости.

7.1 Переменные вихрь-функция тока

Уравнения Навье–Стокса для описания поведения вязкой несжимаемой жидкости имеют вид (см., например, [16])

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Здесь \mathbf{v} — скорость, p — давление, μ — коэффициент кинематической вязкости жидкости.

В двумерном случае ($\mathbf{v} = (u, w)$) покоординатная запись уравнений (7.1) будет следующей

$$\begin{aligned}u_t + uu_x + ww_y &= -p_x + \mu(u_{xx} + u_{yy}), \\ w_t + uw_x + ww_y &= -p_y + \mu(w_{xx} + w_{yy}), \\ u_y + w_x &= 0.\end{aligned}\tag{7.2}$$

Введем функцию тока ψ при помощи соотношений (при этом уравнение $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ удовлетворяется автоматически)

$$u = \psi_y, \quad w = -\psi_x.\tag{7.3}$$

Введем обозначение для вихря скорости ω

$$\omega = w_x - u_y.\tag{7.4}$$

На самом деле, ω — это z -компонента вектора $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$, т. е. $\omega = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}$, где \mathbf{k} — единичный вектор, перпендикулярный плоскости (x, y) .

Дифференцируя первое уравнение (7.2) по y , второе — по x и вычитая друг из друга, с учетом обозначений (7.4) выводим (эти действия позволяют исключить давление p из уравнений (7.2))

$$\omega_t + u\omega_x + w\omega_y = \mu(\omega_{xx} + \omega_{yy}). \quad (7.5)$$

При помощи (7.3) с учетом (7.4) нетрудно получить уравнения, связывающие вихрь и функцию тока

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = -\omega. \quad (7.6)$$

Окончательно, для определения ω , ψ имеем так называемые уравнения в переменных вихрь–функция тока

$$\omega_t + u\omega_x + w\omega_y = \mu(\omega_{xx} + \omega_{yy}), \quad (7.7)$$

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = -\omega, \quad (7.8)$$

$$u = \psi_y, \quad w = -\psi_x. \quad (7.9)$$

Векторная форма записи уравнений (7.7)–(7.9) имеет вид

$$\omega_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \mu \Delta \omega, \quad (7.10)$$

$$\Delta \psi = -\omega, \quad (7.11)$$

$$\mathbf{v} = (\psi_y, -\psi_x). \quad (7.12)$$

Конечно, можно подставить (7.12) в (7.10) и, используя (7.11), записать уравнения лишь для функции тока

$$(\Delta \psi)_t + \psi_y (\Delta \psi)_x - \psi_x (\Delta \psi)_y = \mu \Delta^2 \psi.$$

Для дальнейших целей удобна именно система (7.7)–(7.9) или (7.10)–(7.12) в переменных вихрь–функция тока.

Формально, уравнение (7.10) совпадает с уравнением (5.29), описывающим процесс переноса примеси в поле скорости \mathbf{v} при наличии диффузии. Роль примеси в данном случае играет вихрь ω . Отметим, что поле скорости в гл. 5 считалось известной функцией $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, t)$, а в случае системы (7.10)–(7.12) поле скорости $\mathbf{v} = (\psi_y, -\psi_x)$ зависит от ω и определяется уравнением Пуассона (7.11). Иными словами, вихрь в процессе эволюции «перестраивает» поле скорости, в котором осуществляется его перенос.

7.2 Постановка задачи

Рассмотрим задачу о поведении вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной двумерной области D с непроницаемыми границами. Предполагаем, что в начальный момент времени в области D задано распределение вихря скорости $\omega_0(x, y)$

$$\omega_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \mu \Delta \omega, \quad \mathbf{v} = (\psi_y, -\psi_x), \quad (x, y) \in D, \quad (7.13)$$

$$\omega|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \partial D, \quad (7.14)$$

$$\omega|_{t=0} = \omega_0(x, y), \quad (x, y) \in D. \quad (7.15)$$

$$\Delta\psi = -\omega, \quad (x, y) \in D, \quad (7.16)$$

$$\psi|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \partial D. \quad (7.17)$$

Объясним, почему краевое условие для функции тока ψ имеет вид (7.17). В случае вязкой жидкости на непроницаемой границе для скорости \mathbf{v} имеем

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad w|_{\Gamma} = 0$$

или

$$\psi_y|_{\Gamma} = 0, \quad \psi_x|_{\Gamma} = 0.$$

Пусть Γ достаточно гладкая граница: $\Gamma = \{(x, y) : x = x(s), y = y(s)\}$, где s — параметр. Вычисляя производную функции ψ вдоль границы, получим

$$\psi_s|_{\Gamma} = (\psi_x x'(s) + \psi_y y'(s))|_{\Gamma} = \psi_x|_{\Gamma} x'(s) + \psi_y|_{\Gamma} y'(s) = 0.$$

Это означает, что $\psi|_{\Gamma} = \text{const}$. С учетом того, что функция ψ определена с точностью до постоянной, выберем $\psi|_{\Gamma} = 0$.

7.3 Алгоритм решения задачи

Для решения задачи (7.13)–(7.17) можно применять результаты гл. 5, т. к. левая часть уравнения (5.1) идентична левой части уравнения (7.13).

Будем использовать следующий алгоритм дискретизации задачи по времени. Обозначим (см. (5.22))

$$\omega^m(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}, t_m). \quad (7.18)$$

Для вычисления величины $\omega^m(\mathbf{X}^m(\mathbf{x}))$ возьмем формулы, аналогичные (5.23), (5.24)

$$\omega^m(\mathbf{X}^m(\mathbf{x})) = \omega^m(\mathbf{x}) - \tau \mathbf{v}^m(\mathbf{x}) \cdot \nabla \omega^m(\mathbf{x}). \quad (7.19)$$

$$\omega^m(\mathbf{X}^m(\mathbf{x})) = \text{convect}([u^m(\mathbf{x}), w^m(\mathbf{x})], -\tau, \omega^m(\mathbf{x})), \quad \mathbf{v} = (u, w). \quad (7.20)$$

Уравнение (7.10) аппроксимируем выражением (см. (5.25), (5.26), (5.30))

$$\frac{\omega^{m+1}(\mathbf{x}) - \omega^m(\mathbf{x})}{\tau} + \mathbf{v}^m(\mathbf{x}) \cdot \nabla \omega^m(\mathbf{x}) - \mu \Delta \omega^{m+1}(\mathbf{x}) = 0. \quad (7.21)$$

Заметим, что, как и в гл. 6 (см. (6.5)–(6.8)), для аппроксимации использована явно-неявная схема — линейные члены, т. е. $\Delta\omega$, выбираются в момент времени $t = t_{m+1}$, а нелинейные, т. е. $\mathbf{v} \cdot \nabla\omega$, — в момент времени $t = t_m$.

При помощи (7.19) получим

$$\frac{\omega^{m+1}(\mathbf{x}) - \omega^m(\mathbf{X}^m(\mathbf{x}))}{\tau} - \mu \Delta \omega^{m+1}(\mathbf{x}) = 0. \quad (7.22)$$

С учетом обозначения (7.20) запишем (7.22) в виде

$$\omega^{m+1}(\mathbf{x}) - \text{convect}([u^m(\mathbf{x}), w^m(\mathbf{x})], -\tau, \omega^m(\mathbf{x})) - \tau\mu\Delta\omega^{m+1}(\mathbf{x}) = 0. \quad (7.23)$$

Таким образом, величина ω^{m+1} рассчитывается по значениям величин ω^m , u^m , w^m . Очевидно, что если величина ω^m известна, то u^m , w^m определяются решением стационарной задачи (7.16), (7.17)

$$\Delta\psi^m = -\omega^m, \quad \psi^m|_{\Gamma} = 0. \quad (7.24)$$

По известной ψ^m с учетом формулы (7.12) вычисляем u^m , w^m . В языке FreeFem++ для вычисления производных по x и y используются ключевые слова dx , dy

$$u^m = \text{dy}(\psi^m); \quad w^m = -\text{dx}(\psi^m). \quad (7.25)$$

✓. Обратим внимание, что использование явно-неявной дискретизации по времени позволило «расщепить» исходную задачу (7.13)–(7.17) на две задачи — задачу (7.16), (7.17) для определения скорости \mathbf{v}^m и задачу (7.13)–(7.15) для определения ω^{m+1} .

7.4 Реализация алгоритма на языке FreeFem++

Приведем полный текст программы на языке FreeFem++ для решения задачи (7.13)–(7.17) в случае прямоугольной области $\bar{D} = [0, a] \times [0, b]$. Для определенности выбираем начальное распределение вихря скорости $\omega_0(x, y)$ в виде

$$\omega_0(x, y) = \sum_{k=1}^n A_k \left\{ 1 + \text{th}(-\beta((x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 - r_k^2)) \right\}. \quad (7.26)$$

При больших значениях параметра $\beta > 0$ это соответствует вихревым «пятнам» $D_k = \{(x, y) : (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 \leq r_k^2\}$, которые сосредоточены в кругах с радиусами r_k и центрами в точках с координатами (x_k, y_k) . Для каждого «пятна» при $\beta \gg 1$ имеем

$$\Delta\psi \approx -2A_k, \quad (x, y) \in D_k, \quad \psi|_{D \setminus \bigcup_k D_k} \approx 0,$$

$$\psi \approx -A_k((x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 - r_k^2),$$

$$u = \psi_y \approx -2A_k(y - y_k), \quad w = -\psi_x \approx 2A_k(x - x_k).$$

Это означает, что при $A_k > 0$ жидкость в «пятне» D_k вращается как твердое тело вокруг точки (x_k, y_k) против часовой стрелки (при $A_k < 0$ — по часовой стрелке) с угловой скоростью $2A_k$.

```

1 real a=1.0, b=1.0;
2 int n=6;
3 real t, dt, mu;
```

```

4 // задаем границы области (прямоугольник [0,a]x[0,b])
5 border GammaB(t=0,1){ x=a*t; y=0; };
6 border GammaR(t=0,1){ x=a; y=b*t; };
7 border GammaT(t=0,1){ x=a*(1-t); y=b; };
8 border GammaL(t=0,1){ x=0; y=b*(1-t); };
9 mesh Th = buildmesh(GammaB(5*n)+GammaR(5*n)+GammaT(5*n)+GammaL(5*n));
10 fespace Vh(Th,P2); // задаем пространство конечных элементов
11 // на Vh задаем искомые функции omega, psi, u, w,
12 // тестовые функции v, vpsi и вспомогательную omegaOld
13 Vh omega, psi, u, w, v, vpsi, omegaOld;
14 // определяем функцию -- начальное распределение вихря
15 real Ampl1=24, Ampl2=-24, Ampl3=24, Ampl4=-24;
16 real x1=0.2, x2=0.8, y1=0.25, y2=0.25, x3=0.2, x4=0.8, y3=0.75, y4=0.75;
17 real beta=50, r1=0.05, r2=0.05, r3=0.05, r4=0.05;
18 func omega0 = Ampl1*(1+tanh( -beta*((x-x1)^2 + (y-y1)^2 - r1^2) ))
19             + Ampl2*(1+tanh( -beta*((x-x2)^2 + (y-y2)^2 - r2^2) ))
20             + Ampl3*(1+tanh( -beta*((x-x3)^2 + (y-y3)^2 - r3^2) ))
21             + Ampl4*(1+tanh( -beta*((x-x4)^2 + (y-y4)^2 - r4^2) ));
22 mu = 0.001;
23 t = 0; dt = 0.01;
24 omegaOld = omega0;
25 problem Curl(omega, v) = // задача (7.13)-(7.14)
26     int2d(Th)(omega*v)
27     - int2d(Th)(v * convect([u,w],-dt,omegaOld))
28     + int2d(Th)( dt * mu * (dx(omega) * dx(v) + dy(omega) * dy(v)))
29     + on(GammaB,GammaL,GammaR,GammaT, omega=0) ;
30 problem Poisson(psi,vpsi) = // задача (7.16)-(7.17)
31     int2d(Th)( dx(psi)*dx(vpsi)+dy(psi)*dy(vpsi) )
32     - int2d(Th)( omegaOld * vpsi )
33     + on(GammaB, GammaL, GammaR, GammaT, psi=0);
34 // организуем пошаговое решение задачи
35 for (int m=0; m<=1000; m++)
36 { t = t + dt;
37   Poisson;
38   u = dy(psi); w = -dx(psi);
39   omega = dx(w) - dy(u);
40   Curl;
41   omegaOld = omega;
42   plot(omega, cmm=" t="+t);
43 }

```

7.5 Вычислительный эксперимент

7.5.1 Движение вихрей в квадратной области

На рис. 7.1 приведены результаты расчета при $\mu = 0,001$ с шагом по времени $\Delta t = 0,01$ для $t = 0,25m$, $m = 0, 1, \dots, 11$. Начальное распределение вихря скорости $\omega_0(x, y)$ в области $\bar{D} = [0, 1] \times [0, 1]$ задавалось формулой (7.26) с параметрами $\beta = 50$; $A_1 = A_3 = 24$; $A_2 = A_4 = -24$;

$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0,05$; $x_1 = 0,2$; $x_2 = 0,8$; $y_1 = 0,25$; $y_2 = 0,25$; $x_3 = 0,2$; $x_4 = 0,8$; $y_3 = 0,75$; $y_4 = 0,75$; $n = 4$.

В начальный момент времени первое и третье «пятно» вращаются против часовой стрелки, а второе и четвертое — по часовой стрелке.

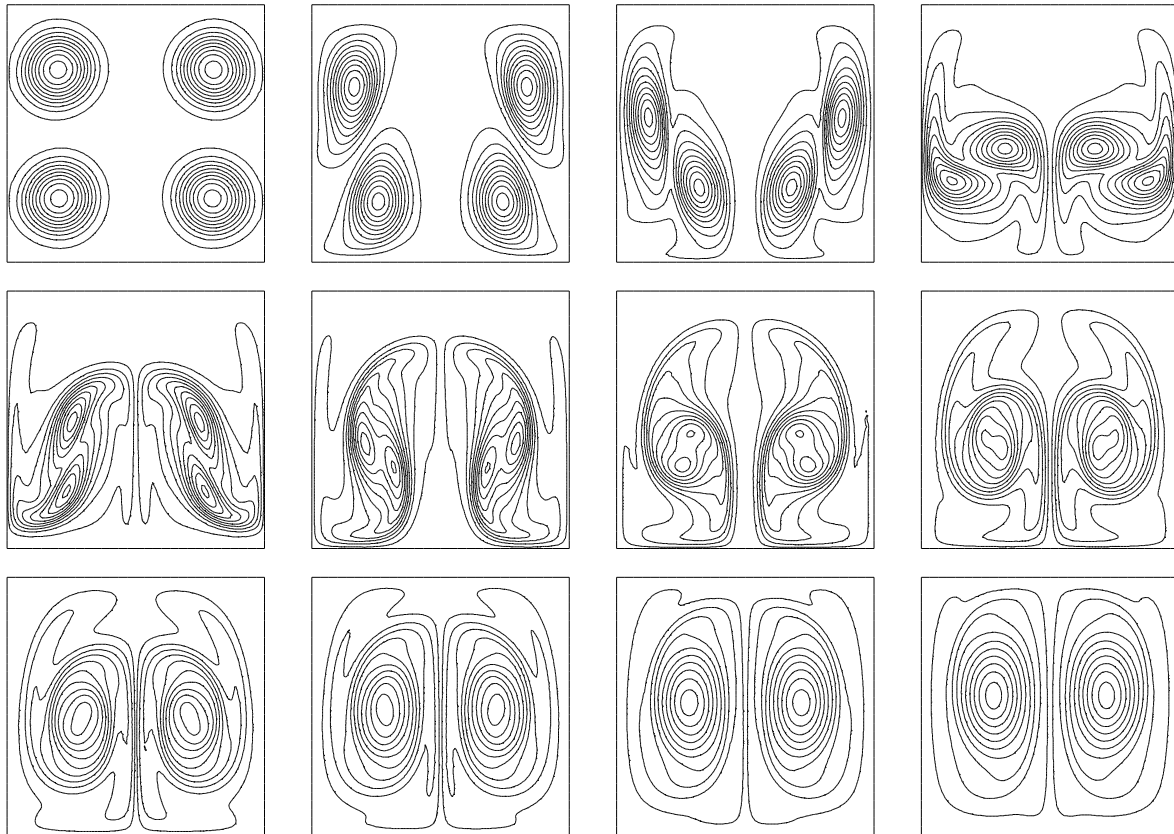


Рис. 7.1. Изолинии вихря скорости ω при $t = 0,25m$, $m = 0, 1, \dots, 11$

7.5.2 Движение вихрей в круге

Одним из преимуществ FreeFem++ является тот факт, что для изменения формы области и начальных данных требуются минимальные изменения кода программы. Например, для исследования движения вихрей в круге достаточно задать границу в виде

```
border Gamma(t=0,2*pi){ x=cos(t); y=sin(t); };
```

заменить строки

```
problem Curl(omega, v) = ...
    + on(GammaB,GammaL,GammaR,GammaT, omega=0);
problem Poisson(psi,vpsi) = ...
    + on(GammaB, GammaL, GammaR, GammaT, psi=0);
```

на

```
problem Curl(omega, v) = ... + on(Gamma, omega=0);
problem Poisson(psi,vpsi) = ... + on(Gamma, psi=0);
```

При задании начальных условий (7.26) используем параметры, которые соответствуют распределению семи вихрей в круге: $\beta = 50$; $r_k = 0,005$, $k = 1, \dots, 7$; $A_k = 24$, $k = 1, \dots, 6$; $A_7 = -24$, $x_7 = 0$; $y_7 = 0$; $r_0 = 0,65$;

$$x_k = r_0 \cos \frac{k\pi}{3}, \quad y_k = r_0 \sin \frac{k\pi}{3}, \quad k = 1, \dots, 6.$$

Результаты вычислений для $\mu = 0,001$ в круге единичного радиуса в различные моменты времени приведены на рис. 7.2. Расчет проводился с шагом $\Delta t = 0,0025$. Движение жидкости в целом происходит против часовой стрелки.

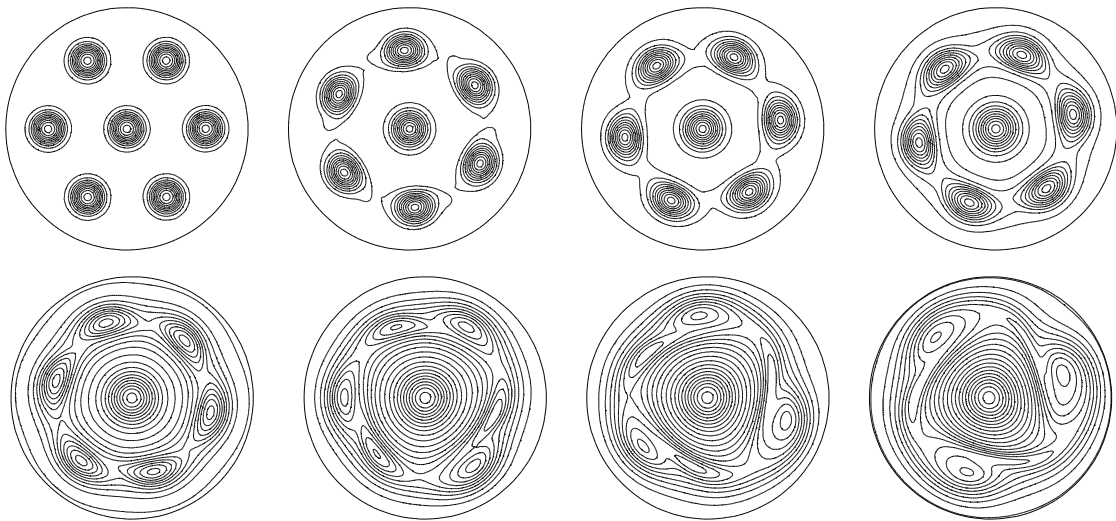


Рис. 7.2. Семь вихрей $A_k = 24$, $k = 1, \dots, 6$, $A_7 = -24$ при $t = 0, 1, 2, 4, 7, 9, 10, 11$

Заметим, что на эволюцию вихрей достаточно сильно влияет их начальное распределение. Результаты вычислений для $A_k = 48$, $k = 1, \dots, 6$, $A_7 = -48$, $\mu = 0,001$ в круге единичного радиуса приведены на рис. 7.3. Расчет проводился с шагом $\Delta t = 0,0025$.

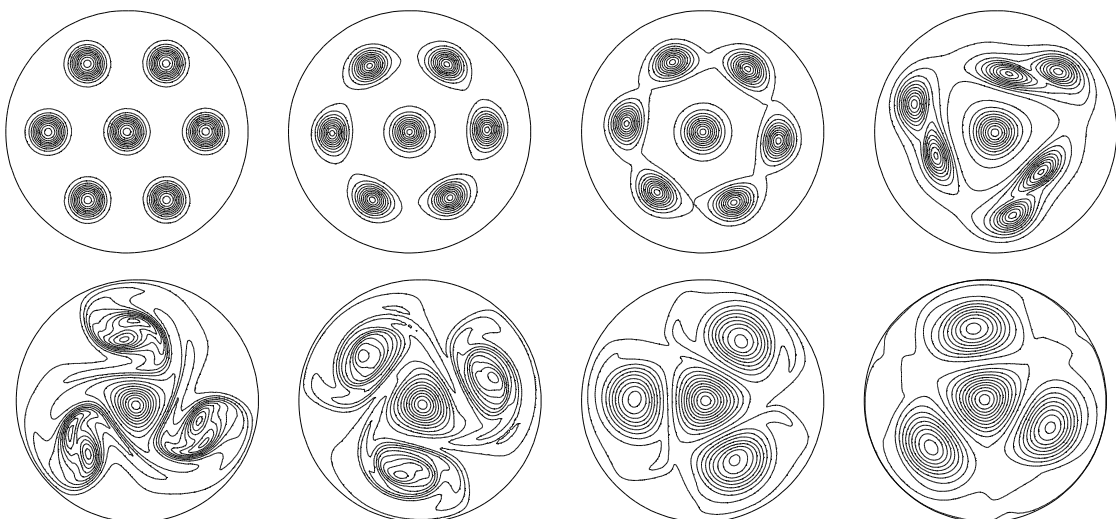


Рис. 7.3. Семь вихрей $A_k = 48$, $k = 1, \dots, 6$, $A_7 = -48$ при $t = 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8$

На рис. 7.4 для случая $A_k = 48$, $k = 1, \dots, 6$, $A_7 = -48$ показаны линии уровня функции тока ψ .

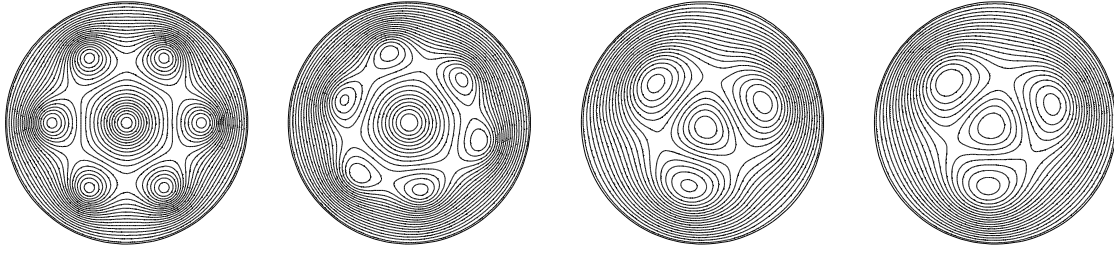


Рис. 7.4. Семь вихрей $A_k = 48$, $k = 1, \dots, 6$, $A_7 = -48$; изолинии функция тока $\psi(x, y, t)$ при $t = 0, 3, 6, 9$

7.5.3 Периодические краевые условия. Вихри на торе

При помощи FreeFem++ можно решать задачи с периодическими краевыми условиями. Для определенности рассмотрим задачу о движении вихрей на торе, заменив в задаче (7.13)–(7.17) краевые условия (7.14), (7.17) условиями периодичности

$$\omega_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \mu \Delta \omega, \quad \Delta \psi = -\omega, \quad \mathbf{v} = (\psi_y, -\psi_x), \quad (x, y) \in D, \quad (7.27)$$

$$\omega(0, y, t) = \omega(a, y, t), \quad \psi(0, y, t) = \psi(a, y, t), \quad 0 \leq y \leq b, \quad (7.28)$$

$$\omega(x, 0, t) = \omega(x, b, t), \quad \psi(x, 0, t) = \psi(x, b, t), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (7.29)$$

$$\omega|_{t=0} = \omega_0(x, y), \quad (x, y) \in D. \quad (7.30)$$

Для реализации условия периодичности (7.28) в коде программы п. 7.4 следует записать строку 10 в виде

```
fespace Vh(Th, P2, periodic=[ [GammaL,y], [GammaR,y] ] );
```

Для реализации условия периодичности (7.29) в коде программы п. 7.4 следует записать строку 10 в виде

```
fespace Vh(Th, P2, periodic=[ [GammaB,x], [GammaT,x] ] );
```

Чтобы **одновременно** реализовать условия (7.28) и (7.29), в коде программы п. 7.4 следует записать строку 10 в виде

```
fespace Vh(Th, P2, periodic=[ [GammaB,x], [GammaT,x],  
                             [GammaL,y], [GammaR,y] ] );
```

Формат записи условий периодичности достаточно прозрачен. Используется ключевое слово `periodic`, указываются идентификаторы границ (например, для (7.28) это `GammaL`, `GammaR`) и имя переменной, которая изменяется на данных границах (для (7.28) это `y`). Конечно, при задании условий (7.28), (7.29) из кода программы п. 7.4 следует удалить строки 29 и 33, которые реализовали задание краевых условий первого рода (7.14),

(7.17) на границах прямоугольника. Более подробно способ использования ключевого слова `periodic` описано в [1].

Топологически область D представляет собой двумерный тор — прямоугольник со «склеенными» противоположными сторонами. Во избежание недоразумений, заметим, что D не является «физическим» тором, т. е. тороидальной поверхностью $S^1 \times S^1$, где S^1 — окружности. Задача (7.27)–(7.30) для исследования поведения начального распределения вихря $\omega_0(x, y)$ решается в декартовых координатах (плоской геометрии) и кривизна поверхности не учитывается.

Результаты вычислений с шагом $\Delta t = 0,01$ для начальных данных, таких же как в п. 7.4, в различные моменты времени приведены на рис. 7.5.

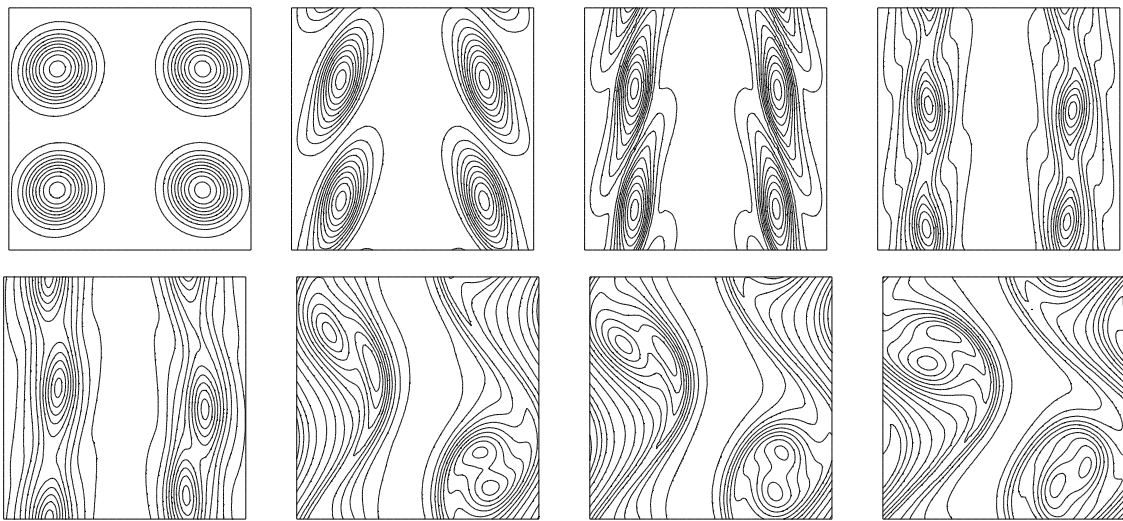


Рис. 7.5. Изолинии вихря скорости ω на торе при $t = 0,0; 0,2; 0,4; 0,8; 1,2; 1,8; 1,9; 2,1$